УДК 517.9

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ВКЛЮЧЕНИЯ ГАММЕРШТЕЙНА С НЕВЫПУКЛЫМИ ОБРАЗАМИ

© А.И. Булгаков, И.В. Васильева

Bulgakov A.I., Vasilyeva I.V. The Existence of Solutions of the Hammerstein Inclusions with Nonconvex Images. This paper contains a treatment of the integral Hammerstein inclusion generated by the product of a linear integral Nemytski operator and multivalued mapping with nonconvex images. The theorem of the existence of a solution for the Hammerstein inclusion is proved.

Пусть R^n - пространство n-мерных вектор-столбцов с нормой $|\cdot|$. Обозначим $comp\,[R^n]$- множество всех непустых компактов пространства R^n; $L^n[a,\ b]$ пространство функций $x{:}[a,\ b] \to R^n$ с суммируемыми по Лебегу компонентами и нормой $\|x\|_L = \int_a^b |x(s)|ds$; $C^n[a,\ b]$ пространство непрерывных функций $x{:}[a,\ b] \to R^n$ с нормой $\|x\|_C = max\{|x(t)|: t \in [a,b]\}$.

Пусть $A, B \in comp[R^n]$ и пусть $h^+[A,B] = sup\{\rho(a,b): a \in A\}$, где $\rho(\cdot,\ \cdot)$ - расстояние в пространстве R^n от точки до множества. Обозначим $h[A,B] \equiv max\{h^+[A,B], h^+[B,A]\}$ хаусдорфово расстояние между множествами A и B; $\|A\| \equiv sup\{|a|: a \in A\}$.

Будем говорить, что множество $\Psi \subset L^n[a,b]$ выпукло по переключению, если для любых измеримых по Лебегу множеств $U_1, U_2 \subset [a,b]$, таких, что $U_1 \cap U_2 = \varnothing$, $U_1 \cup U_2 = [a,b]$ и любых $x,\ y \in \Psi$ справедливо включение $\chi(U_1)x + \chi(U_2)y \in \Psi$, где $\chi(\cdot)$ - характеристическая функция соответствующих множеств. Обозначим через $\prod[L^n[a,b]]$ множество всех непустых замкнутых ограниченных выпуклых по переключению подмножеств из $L^n[a,b]$.

Непрерывность многозначных отображений понимается по Хаусдорфу. Измеримость множеств везде понимается по Лебегу, измеримость многозначных отображений будем понимать в смысле [1].

Пусть многозначное отображение $F{:}[a,\ b]\times R^n \to comp[R^n]$. Будем говорить, что F удовлетворяет условиям Каратеодори, если выполняются следующие условия:

а) при каждом $x \in R^n$ отображение $F(\cdot,\ x)$ измеримо;

б) при почти всех $t \in [a,b]$ отображение $F(t,\ )$ непрерывно;

в) для каждого ограниченного множества $V \subset R^n$ найдется функция $\alpha_V \in L^1[a,b]$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $x \in V$ выполняется неравенство $\|F(t,x)\| \le \alpha_V(t)$.

Многозначный оператор Немыцкого N, порожденный многозначной функцией $F{:}[a,\ в]\times R^n \to comp\,[R^n]$, определен равенством $Nx = \{y \in L^n[a,\ в]: y(t) \in F(t,\ x\,(t))$ при п.в. $t \in [a,\ в]\}$.

Если F удовлетворяет условиям Каратеодори, то оператор $N{:}C^n\,[a,\ в] \to \Pi\,[L^n\,[a,\ в]]$ непрерывен.

Рассмотрим интегральное включение в пространстве $C^n\,[a,\ в]$

$$x \in V\,Nx + f, \tag{1}$$

где $f \in C^n\,[a,\ в]$, многозначный оператор Немыцкого N порожден функцией $F{:}[a,\ в]\times R^n \to comp\,[R^n]$, удовлетворяющей условиям Каратеодори и условию Липшица: существует такая функция $\beta \in L^1\,[a,\ в]$, что для почти всех $t \in [a,\ в]$ и всех $x,\ y \in R^n$ справедливо неравенство

$$h\,[F(t,\ x),\ F(t,\ y)] \le \beta(t)\ |x - y|. \tag{2}$$

Линейный непрерывный интегральный оператор $V{:}\ L^n\,[a,\ в] \to C^n\,[a,\ в]$ определен равенством

$$(Vz)(t) = \int_a^b V(t,s)z(s)ds,\ \ t \in [a,b]. \tag{3}$$

Под решением включения (1) будем понимать такой элемент $x \in C^n\,[a,\ в]$, для которого справедливо включение (1). Таким образом, каждому решению x включения (1) соответствует такой $z \in L^n\,[a,\ в]$, что $z \in Nx$ и $x = Vz + f$.

Так как многозначная функция F, порождающая оператор Немыцкого, вообще говоря, имеет невыпуклые значения, то оператор Немыцкого N также имеет невыпуклые образы. Поэтому произведение операторов VN, как показывают простые примеры, имеет значения, не являющимися выпуклыми замкнутыми множествами пространства $C^n\,[a,\, в]$. В связи с этим для исследования включения (1) нельзя применять традиционные методы исследования (теорему Какутани [2], принцип сжимающих отображений [3]).

В данной работе для исследования включения (1) применяется метод последовательных приближений ($y_i = Vz_i + f,\ z_i \in Ny_{i-1},\ i = 1, 2, \dots$). Причем последовательные приближения выбираются таким образом, чтобы последовательность прообразов $\{z_i\}$ являлась сходящейся в пространстве $L^n\,[a,\, в]$. Отметим, что для уравнений такой проблемы не существует, поскольку это свойство непосредственно вытекает из непрерывности однозначного оператора Немыцкого.

Пусть $z_0 \in L^n\,[a,\, в]$, $f_1 \in C^n\,[a,\, в]$, и пусть функция $y_0 \in C^n\,[a,\, в]$ удовлетворяет равенству

$$y_0 = V z_0 + f_1. \qquad (4)$$

Далее, пусть существует такая функция $\kappa \in L^1\,[a,\, в]$, что при почти всех $t \in [a,\, в]$ справедливо неравенство

$$\rho[z_0\,(t),\ F\,(t,\, y_0\,(t))] \le \kappa(t). \qquad (5)$$

Пусть непрерывная функция $\nu_0 : [a,\ в] \to [0, \infty)$ задана равенством

$$\nu_0(t) = \int_a^b |V(t,s)|\kappa\ (s)ds + |f(t) - f_1(t)|. \qquad (6)$$

Будем говорить, что произведение VN обладает свойством A, если для непрерывного оператора $G : C^1\,[a,\, в] \to C^1\,[a,\, в]$, определенного равенством

$$(Gp)(t) = \int_a^b |V(t,s)|\rho(s)p(s)ds + \nu_0(t), \qquad (7)$$

сходятся последовательные приближения

$$P_i = G\,P_{i-1}, \qquad i = 1,\, 2,\, \dots\, ,\, P_o = \nu_o. \qquad (8)$$

Здесь $|V\,(t,\, s)|$ согласованная с пространством R^n норма $n \times n$ - матрицы в представлении (3), функция $\beta \in L^1\,[a,\, в]$ удовлетворяет неравенству (2).

Ниже везде будем предполагать, что произведение VN обладает свойством A, а также далее будем обозначать $\widetilde{G}$ оператор, определенный равенством (7) при $\nu_0 = 0$.

Далее, рассмотрим в пространстве $C^1\,[a,\, в]$ уравнение

$$\xi(t) = \int_a^b |V(t,s)|\beta(s)\xi(s)ds + \nu_0(t), \qquad (9)$$

где функция $\nu_0 \in C^1\,[a,\, в]$ задана соотношением (6), а решение ξ определено последовательными приближениями (8). Отметим, что поскольку последовательные приближения (8) сходятся, то решение ξ уравнения (9) представимо в виде

$$\xi = \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{G}^i \nu_0,\ \ \widetilde{G}^0 \nu_0 \equiv \nu_0\,. \qquad (10)$$

Т е о р е м а. Для любой функции $y_0 \in C^n\,[a,\, в]$, определенной равенством (4), существует такое решение y ($y = Vz + f,\ z \in Ny$) включения (1), что для любого $t \in [a,\, в]$ выполняется оценка

$$|y\,(t) - y_0\,(t)| \le \xi(t) \qquad (11)$$

и для почти всех $t \in [a,\, в]$ справедливо соотношение

$$|z\,(t) - z_0\,(t)| \le \beta(t)\ \xi(t) + \kappa(t), \qquad (12)$$

где ξ - решение уравнения (9), функции β, $\kappa \in L^1\,[a,\, в]$ удовлетворяют неравенствам (2), (5) соответственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция $y_0 \in C^n\,[a,\, в]$ представима в виде (4) и пусть функция $z_1 \in Ny_0$ при почти всех $t \in [a,\, в]$ удовлетворяет равенству

$$|z_1(t) - z_0\,(t)| = \rho[z_0\,(t),\ F(t,\, y_0\,(t))].$$

Из определения функции z_1 и неравенства (5) при почти всех $t \in [a,\, в]$ вытекает оценка

$$|z_1(t) - z_0\,(t)| \le\ \kappa(t). \qquad (13)$$

Далее, пусть $y_1 = Vz_1 + f$. Из определений функций y_1 и y_0 и неравенства (13) для любого $t \in [a,\, в]$ вытекает соотношение

$$|y_1(t) - y_0(t)| \le \int_a^b |V(t,s)|\kappa(s)ds + |f_1(t) - f(t)| = \nu_0(t). \qquad (14)$$

Пусть функция $z_2 \in Ny_1$ при почти всех $t \in [a,\, в]$ удовлетворяет равенству

$$|z_2(t) - z_1(t)| = \rho\ [z_1\,(t),\ F(t,\, y_1(t))].$$

Из определения функций z_1 и z_2 и неравенств (2), (14) при почти всех $t \in [a,\, в]$ получаем оценку

$$|z_2\,(t) - z_1(t)| \le h[F(t,\, y_0\,(t)),\ F(t,\, y_1(t))] \le \beta(t)\nu_0\,(t). \qquad (15)$$

Пусть $y_2 = Vz_2 + f$. Тогда согласно определению функций y_1 и y_2 и неравенства (15) для любого $t \in [a, в]$ имеет место соотношение

$$|y_2(t) - y_1(t)| \le \int_a^b |V(t,s)|\beta(s)v_0(s)ds = (\tilde{G}v_0)(t). \quad (16)$$

Далее, пусть $z_3 \in Ny_2$ при почти всех $t \in [a, в]$ удовлетворяет равенству

$$|z_3(t) - z_2(t)| = \rho\,[z_2(t), F(t, y_2(t))].$$

Из определения функций z_2 и z_3 и неравенств (2), (16) при почти всех $t \in [a, в]$ имеем оценку

$$|z_3(t) - z_2(t)| \le \beta(t)|y_2(t) - y_1(t)| \le \beta(t)(\tilde{G}v_0)(t).$$

Аналогично, пусть $y_3 = Vz_3 + f$. Тогда для любого $t \in [a, в]$ получаем

$$|y_3(t) - y_2(t)| \le \int_a^b |V(t,s)|\beta(s)(\tilde{G}v_0)(s)ds = (\tilde{G}^2 v_0)(t). \quad (17)$$

Далее, пусть $z_4 \in Ny_3$ при почти всех $t \in [a, в]$ удовлетворяет равенству

$$|z_4(t) - z_3(t)| = \rho[z_3(t), F(t, y_3(t))].$$

Отсюда из (2) и (17) при почти всех $t \in [a, в]$ получаем оценку

$$|z_4(t) - z_3(t)| \le \beta(t)(\tilde{G}^2 v_0)(t).$$

Таким образом, можно определить такие последовательности $\{y_i\} \subset C^n[a, в]$, $\{z_i\} \subset L^n[a, в]$, что для любого $i = 1, 2, \ldots$ $y_i = Vz_i + f$, $z_i \in Ny_{i-1}$, причем для любого $t \in [a, в]$ имеет место неравенство

$$|y_i(t) - y_{i-1}(t)| \le (\tilde{G}^{i-1}v_0)(t), \quad i = 1, 2, \ldots (\tilde{G}^0 v_0 = v_0) \quad (18)$$

и при почти всех $t \in [a, в]$ справедлива оценка

$$|z_i(t) - z_{i-1}(t)| \le \beta(t)(\tilde{G}^{i-2}v_0)(t), \quad i = 2, 3, \ldots \quad (19)$$

Далее покажем, что последовательности $\{y_i\}$ и $\{z_i\}$ сходятся. Вначале покажем, что сходится последовательность $\{y_i\}$. Пусть $t \in [a, в]$. Для любых $j = 0, 1, \ldots$ и $i = 1, 2, \ldots$ рассмотрим

$$|y_{i+j}(t) - y_j(t)| \le |y_{i+j}(t) - y_{i+j-1}(t)| + |y_{j+i-1}(t) - y_{j+i-2}(t)| + \ldots + |y_{j+1}(t) - y_j(t)|.$$

Отсюда и неравенства (18) получаем оценку

$$|y_{i+j}(t) - y_j(t)| \le (\tilde{G}^{j+i-1}v_0)(t) + (\tilde{G}^{j+i-2}v_0)(t) + \ldots + (\tilde{G}^j v_0)(t).$$

Таким образом, для любого $t \in [a, в]$ и любых $j = 0, 1, \ldots$ и $i = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$|y_{j+i}(t) - y_j(t)| \le \sum_{k=j}^{\infty}(\tilde{G}^k v_0)(t). \quad (20)$$

Отсюда, согласно сходимости ряда (10) вытекает, что

$$\lim_{\substack{i\to\infty \\ j\to\infty}} \|y_{j+i} - y_j\|_C = 0.$$

Следовательно, последовательность $\{y_i\}$ сходится. Пусть $\lim_{i\to\infty} y_i = y$. Далее, покажем, что y - решение включения (1), удовлетворяющее неравенству (11). Прежде всего покажем, что y удовлетворяет неравенству (11). Действительно, положив в неравенстве (20) $j = 0$ и учитывая равенство (10), для любого $t \in [a, в]$ имеем оценку

$$|y_i(t) - y_0(t)| \le \xi(t).$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $i \to \infty$, получаем неравенство (11).

Далее, покажем, что последовательность $\{z_i\}$ сходится. Действительно, для любых $j = 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots$ и $t \in [a, в]$ справедлива оценка

$$|z_{j+i}(t) - z_j(t)| \le |z_{j+i}(t) - z_{j+i-1}(t)| + |z_{j+i-1}(t) - z_{j+i-2}(t)| + \ldots + |z_{j+1}(t) - z_j(t)|.$$

Отсюда согласно (19) при почти всех $t \in [a, в]$ имеет место неравенство

$$|z_{j+i}(t) - z_j(t)| \le \beta(t)((\tilde{G}^{j+i-2}v_0)(t) + (\tilde{G}^{j+i-3}v_0)(t) + \ldots + (\tilde{G}^{j-1}v_0)(t)).$$

Поэтому для почти всех $t \in [a, в]$ и всех $j = 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots$ имеем отношение

$$|z_{j+i}(t) - z_j(t)| \le \beta(t) \sum_{k=j-1}^{\infty}(\tilde{G}^k v_0)(t). \quad (21)$$

Из сходимости ряда (10) и неравенства (21) вытекает, что

$$\lim_{\substack{i\to\infty \\ j\to\infty}} \|z_{j+i} - z_i\|_L = 0.$$

Поэтому предел последовательности $\{z_i\}$ существует. Пусть $\lim_{i\to\infty} z_i = z$. Покажем, что при почти всех $t \in [a, b]$ z удовлетворяет неравенству (12). Действительно, для любого $j = 1, 2, \dots$ и любого $t \in [a, b]$ справедлива оценка

$$|z_j(t) - z_0(t)| \le |z_j(t) - z_1(t)| + |z_1(t) - z_0(t)|.$$

Отсюда согласно (21) и (13) для любого $j = 1, 2, \dots$ при почти всех $t \in [a, b]$ имеет место неравенство

$$|z_j(t) - z_0(t)| \le \beta(t) \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{G}^k v_0)(t) + \kappa(t).$$

Следовательно, учитывая равенство (10), из последнего соотношения для любого $j = 1, 2, \dots$ при почти всех $t \in [a, b]$ имеем оценку

$$|z_j(t) - z_0(t)| \le \beta(t)\ \xi(t) + \kappa(t). \tag{22}$$

Переходя в (22) к пределу при $j \to \infty$ получаем неравенство (12). Далее, так как для любого $j = 1, 2, \dots$ $y_j = Vz_j + f$, то, переходя в этом равенстве к пределу при $j \to \infty$ и учитывая, что $\lim_{i \to \infty} z_i = z$, получим представление $y = Vz + f$. Кроме того, так как для любого $j = 1, 2, \dots$

$$z_j \in Ny_{j-1} \tag{23}$$

то, переходя к пределу в включении (23) и при этом учитывая замкнутозначность и непрерывность оператора Немыцкого, получаем включение $z \in Ny$. Таким образом $y = Vz + f$ - решение включения (1). Теорема доказана.

Замечание 1. В работах [4, 5] для любой функции $y_0 \in C^n [a, b]$, удовлетворяющей представлению (4), и любого $\varepsilon > 0$, доказаны теоремы о существовании решения y_ε включения (1), для которого справедлива оценка (11). Причем ξ_ε решение уравнения (9) с функцией $v_\varepsilon(t) = \int_a^b |V(t,s)|(\kappa(s) + \varepsilon)ds + |f(t) - f_1(t)|$. Получить из результатов работ [4, 5] утверждение для $\varepsilon = 0$ путем предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ невозможно, поскольку произведение VN, как отмечалось, не является замкнутым оператором. Таким образом, доказанная теорема уточняет оценки результатов работ [4, 5] для случая, когда $\varepsilon = 0$.

Замечание 2. Доказанная теорема использует идеи работ [6, 7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. С. 338.
2. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. С. 630.
3. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Указ. соч. С. 42.
4. *Булгаков А.И.* Непрерывные ветви многозначных отображений и интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 3. С. 371-379.
5. *Булгаков А.И.* Интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения к краевым задачам дифференциальных включений // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 10. С. 63-86.
6. *Филиппов А.Ф.* Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1967. № 3. С. 16-26.
7. *Булгаков А.И.* О существовании обобщенного решения функционально-интегрального включения // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 3. С. 514-520.

Поступила в редакцию 22 мая 1996 г.